b-1 通信基礎

(i) (a) ステップ関数のフーリエ変換 $U(\omega)$ は次のように表される.

$$
\begin{aligned}
U(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{0}^{\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t}e^{-\epsilon t}\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon+\mathrm{i}\omega} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2} - \mathrm{i}\frac{\omega}{\epsilon^2+\omega^2}\right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

式 (1) の波線部の項は ϵ がゼロに近づくとディラックのデルタ関数の定数倍になる. **(Fig.1** 参照.)

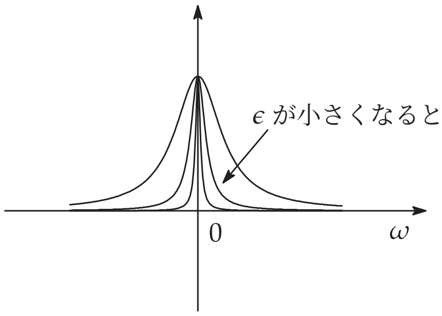

Fig.1　波線の項

この項を積分すればデルタ関数の何倍かが分かる. なぜなら

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2}
$$

となるからである.
実際積分してみると

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\epsilon}{\epsilon^2(1+\tan^2\theta)}\frac{\epsilon}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \pi
\end{aligned} \tag{3}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
U(\omega) &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\omega^2} - \mathrm{i}\frac{\omega}{\epsilon^2+\omega^2}\right) \\
&= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega}
\end{aligned}
$$

を得る. †

† Wikipedia に載っている値と違うのはフーリエ変換の定義の違いによるものです. この解答では逆変換の場合に係数 $1/2\pi$ がつく流儀で計算しているので, Wikipedia に載っている値に $\sqrt{2\pi}$ かけたものが答えになります.

(b) 前問と同じように計算すれば良い. つまり

$$\begin{aligned}\mathrm{SGN}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \\ &= -\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \\ &= \frac{2}{\mathrm{i}\omega} \end{aligned} \tag{4}$$

と求まる.

(c) まず, $F(\omega)$ の逆フーリエ変換の式より

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

である. ここで t と ω を入れ替えると

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t$$

であり, 更に $\omega = -\omega$ とすると

$$\begin{aligned} f(-\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \\ \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t &= \mathcal{F}\left[F(t)\right] = 2\pi f(-\omega) \end{aligned} \tag{5}$$

を得る.

(d) (b) の結果より

$$\mathrm{SGN}(\omega) = \frac{2}{\mathrm{i}\omega}$$

であるので

$$g(t) = \frac{1}{t} = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{SGN}(t)$$

となる. よって $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g(t)] &= \mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{SGN}(t)\right] \\ &= \mathrm{i}\pi\mathrm{sgn}(-\omega) \\ &= -\mathrm{i}\pi\mathrm{sgn}(\omega) \end{aligned} \tag{6}$$

となる.

(e) 畳み込みを用いて $\hat{f}(t)$ を表すと次式のようになる．

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} f(t) * g(t) \tag{7}$$

よって求めるフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\hat{F}(\omega) &= \frac{1}{\pi} F(\omega) G(\omega) \\ &= -\mathrm{i} F(\omega) \mathrm{sgn}(\omega)\end{aligned} \tag{8}$$

と求まる．

(ii) (a) SSB 変調のブロック図は **Fig.2** のようになる．

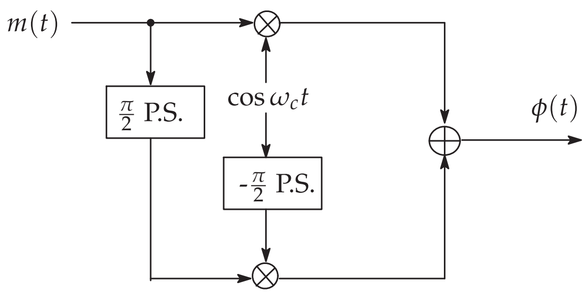

Fig.2　SSB 変調ブロック図

(b) **Fig.2** より $\phi(t)$ は

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \cos(pt)\cos(\omega_c t) + \cos(pt + \pi/2)\cos(\omega_c t - \pi/2) \\ &= \cos(\omega_c + p)t\end{aligned} \tag{9}$$

となる．

(c) 前問の結果から SSB 変調は **Fig.3** のように周波数をシフトするだけであることが分かる．よって変調された波の所要帯域幅は W である．

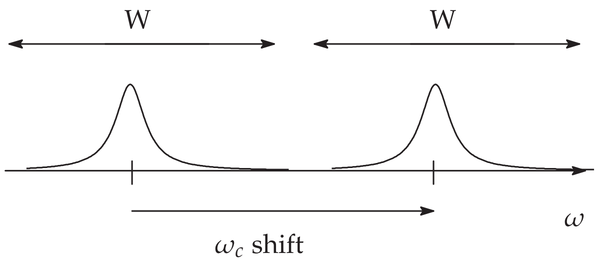

Fig.3　SSB 変調